並列二閾値素子系による金融市場のモデル化とそのベキ則性

京都大学 情報学研究科 数理工学専攻　小崎 元也 [1]，佐藤 彰洋 [2]

金融市場の価格時系列には，間欠性とベキ則性という特徴がある．この特徴を説明する数理モデルとして，並列二閾値素子系モデルを提案する．このモデルが上記の特徴をある程度再現することを数値的に確かめ，系のサイズが大なるときに，価格変動が従う時間発展方程式を導出した．これが乗算ノイズと加算ノイズの両方を持つ線形な確率過程で近似できることを示し，ベキ指数とモデルのパラメータとの関係を明らかにした．

1　金融市場のモデル化

並列二閾値素子系とは，連続な入力に対して3値を出力する素子を並列接続した系であり，生物の神経系のモデルに類似している [1]．我々は，この並列二閾値素子系を用いて，「買い」と「売り」に加えて「待ち」という投資行動を行うエージェントからなる金融市場のモデルを提案する．

並列二閾値素子系による金融市場のモデルを図 1 に示す．エージェント i への入力は，外部からの共通のニュース $s(t)$ と価格フィードバック $z_i(t)$，行動の揺らぎ $\xi_i(t)$ からなり，

$$x_i(t) = s(t) + \xi_i(t) + z_i(t) \tag{1}$$

である．ただし，$\xi_i(t)$ は強度 σ^2 のガウス型白色雑音と仮定する．エージェント i の投資行動は，

$$y_i(t) = \begin{cases} +1, & x_i > \theta_i^B(t) \\ 0, & \theta_i^S(t) \le x_i \le \theta_i^B(t) \\ -1, & x_i < \theta_i^S(t) \end{cases} \tag{2}$$

で与えられる．ここで，$\theta_i^B(t) > \theta^S(t)$ は買いと売りの閾値，$y_i(t)$ の値 $+1, 0, -1$ は，買い，待ち，売りという投資行動に対応する．全エージェントの投資行動の総和

$$Y_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i(t) \tag{3}$$

は，この市場における需要と供給の差であるから，価格変動に比例する量と考えられる [2]．以下，$Y_N(t)$ を単に価格変動と呼ぶ．価格のフィードバック $z_i(t)$ は，

$$z_i(t) = (a\zeta(t) + b_i\eta_i(t))Y_N(t-1) \tag{4}$$

と仮定する．ここで，$a\zeta(t)$ はエージェント全体の揺らぎ (相場観など)，$b_i\eta_i(t)$ はエージェント固有の揺らぎを表す．$\zeta(t)$, $\eta_1(t)$, $\ldots$, $\eta_N(t)$ はすべて，互いに独立で時間的に無相関な，区間 $(-1, 1)$ の一様乱数に従うとする．

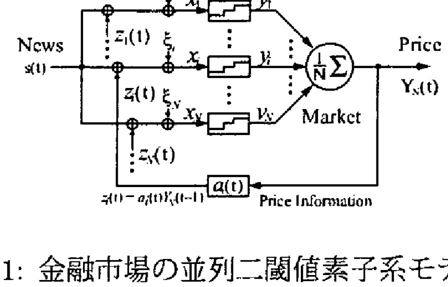

図 1: 金融市場の並列二閾値素子系モデル

[1] E-mail: mkozaki@amp.i.kyoto-u.ac.jp
[2] E-mail: aki@i.kyoto-u.ac.jp

2 数値シミュレーション

前節のモデルの振る舞いを数値計算によって確かめた．エージェント数が十分多い場合，価格変動 $Y_N(t)$ の時系列は，図 2 のように間欠性を示す．

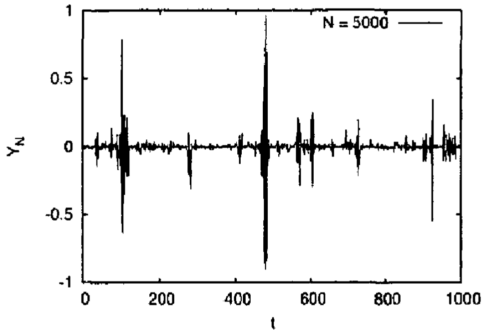

図 2: 価格変動の時系列標本 (N = 5000)

また，価格変動の度数分布は，図 3 のように裾野でベキ則 $\rho(Y_N) \propto Y_N^{-(\beta+1)}$ に従うことが分かる．

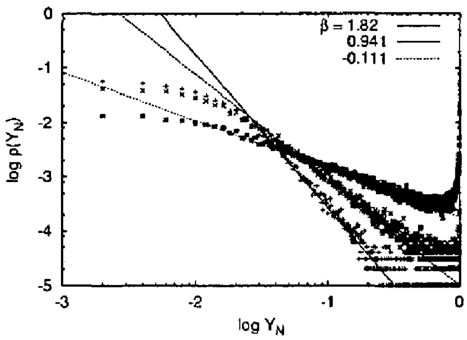

図 3: 価格変動の度数分布

3 解析的取り扱い

全てのエージェントの性質を同一と仮定し，価格変動 $Y_N(t)$ の時間発展方程式を導出した．$\theta_i^B(t) = -\theta_i^S(t) = \theta, i = 1, \ldots, N$ とすると，$\xi_i(t)$ が正規分布に従うことから，

$$Y_N(t+1) \simeq \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\theta - a\zeta(t)Y_N(t)}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{\theta + a\zeta(t)Y_N(t)}{\sqrt{2}\sigma}\right) \quad (5)$$

となる．ただし，$\operatorname{erfc}(x)$ は余誤差関数である．

次に，系のパラメータとベキ指数の関係を調べた．(5) 式を $Y_N(t) = 0$ のまわりで展開して，線形ランダム乗算過程の形に一次近似し，文献 [3] のベキ指数と乗算ノイズの関係式を用いると，

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\sigma}e^{-\frac{\theta}{2\sigma^2}} = (1+\beta)^{\frac{1}{\beta}} \quad (6)$$

なる関係を示すことができる．

4 結論

本稿では，買い，待ち，売りの 3 つの投資行動を行うエージェントからなる金融市場を，並列二閾値素子系によるモデル化した．このモデルでエージェント数が十分大なるとき，間欠性とベキ則性が見られることを，数値計算によって確認した．最後に，このモデルの解析方法に触れ，系のパラメータとベキ指数の関係を導出した．

参考文献

[1] A.-H. Sato, M. Ueda and T. Munakata, Phys. Rev. E **70** (2004), 021106.

[2] J. L. McCauley, Dynamics of Markets: Econophysics and Finance, Cambridge University Press (2004)

[3] H. Takayasu, A.-H. Sato and M. Takayasu, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 966.